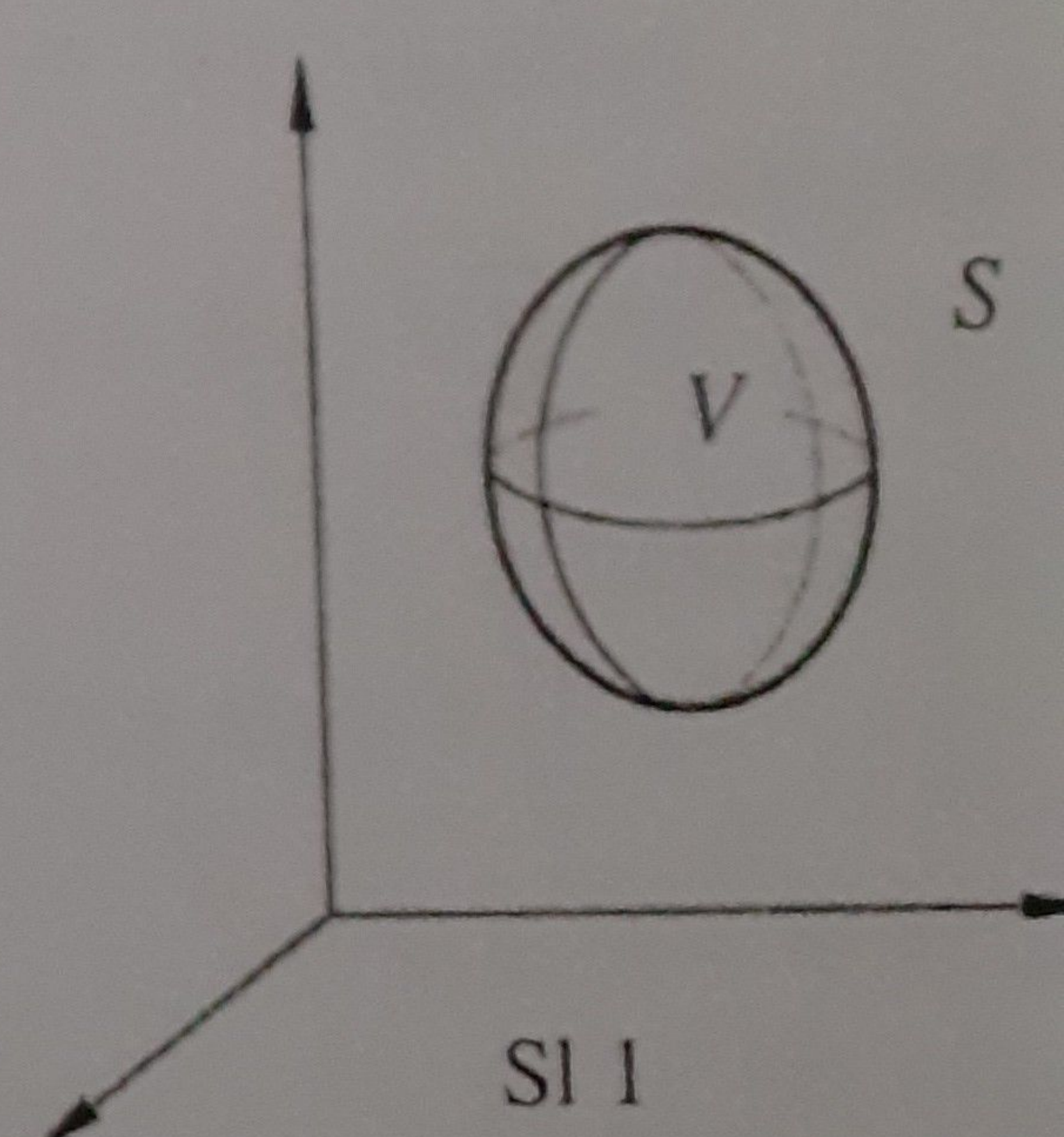
c) Formula Ostrogradskog-Gausa. Stoksova formula

Vidjeli smo da Grinova formula daje vezu između dvostrukog integrala po nekoj oblasti S i krivolinijskog integrala po konturi te oblasti. Pokazalo se da postoji analogna veza između površinskog integrala po zatvorenoj orijentisanoj površi S i trostrukog integrala po tijelu V kojeg ograničava površ S (Sl 1). Pretpostavimo da je površ S pravilna, tj. da svaka prava koja je paralelna sa bilo kojom koordinatnom osom prodire površ S u najviše dvije tačke.



Sl 1

БИБЛИОТЕКА
ТЕХНИЧКОГ ФАКУЛТЕТА

Ako su funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda u oblasti V, tada važi

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oint\!\!\oint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy\,. \qquad (2)$$

Formula (2) naziva se formula Ostrogradskog-Gausa. S obzirom na vezu između površinskih integrala prve i druge vrste, formula (2) zapisuje se i u obliku

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oint\!\!\oint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS\,,$$

gdje su $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ koordinate jediničnog vektora normalnog na površ S.

Primjer 11. Primjenom formule Ostrogradskog-Gausa transformisati sljedeće površinske integrale, ako glatka površ S ograničava tijelo V i $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ su kosinusi uglova koje spoljašnja normala na površ S gradi sa koordinatnim osama:

a) $\iint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 xdxdy$, b) $\iint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS$.

a) $\iint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 xdxdy = 3\iiint_V (x^2+y^2+z^2) dxdydz$;

b) $\iint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS = 2\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Primjer 12. Dokazati da se zapremina V tijela ograničenog sa površi S izračunava po formuli: $V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$, gdje su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ pravci kosinusa spoljašnje normale na površ S.

Primjenom formule Ostrogradskog-Gausa (stavlajjući $P=x$, $Q=y$ i $R=z$) dobijamo da je $V = \iiint_V dxdydz = \frac{1}{3}\iiint_V 3dxdydz = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS$, što je i trebalo dokazati.

Primjer 13. Primjenom formule Ostrgradskog-Gausa izračunati sljedeće integrale:

a) $\iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, gdje je S spoljna normala kocke V: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

b) $\iint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, gdje je S spoljna normala sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

a)

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy = 2\iiint_V (x+y+z)dxdydz = 2\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z)dz = 3a^4$$

b) Uvodeći sferne koordinate: $x = \rho\cos\varphi\sin\psi$, $y = \rho\sin\varphi\sin\psi$, $z = \rho\cos\psi$, $|J| = \rho^2|\sin\varphi|$, V: $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \psi \le \pi$ dobijamo da je

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy =$$

$$3\iiint_V \rho^2\rho^2|\sin\varphi|\,d\rho d\varphi d\psi = 3\cdot 2\int_0^a \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^\pi d\psi = \ldots = \frac{12\pi}{5}a^5 .$$

Primjer 14. Izračunati $\oiint_S 3xdydz + 2ydxdz - 4zdxdy$, ako je S spoljna strana piramide ograničena ravnima $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, u pravcu spoljne normale.

Ovo je zadatak iz primjera 9. Na njega se može primijeniti formula Ostrogradskog-Gausa. Kako je $P = 3x$, $Q = 2y$, $R = -4z$, to je

$$\oiint_S 3xdydz + 2ydxdz - 4zdxdy = \iiint_V (3+2-4)dxdydz = \iiint_V dxdydz = V = \frac{1}{6}.$$

Primjer 15. Izračunati $\oiint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, ako je S spoljna strana kocke koju ograničavaju ravni: $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$, u pravcu spoljne normale.

I ovdje se može primijeniti formula Ostrogradskog-Gausa:

$$\oiint_S xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint_V (1+1+1)dxdydz = 3\iiint_V dxdydz = 3V = 3.$$

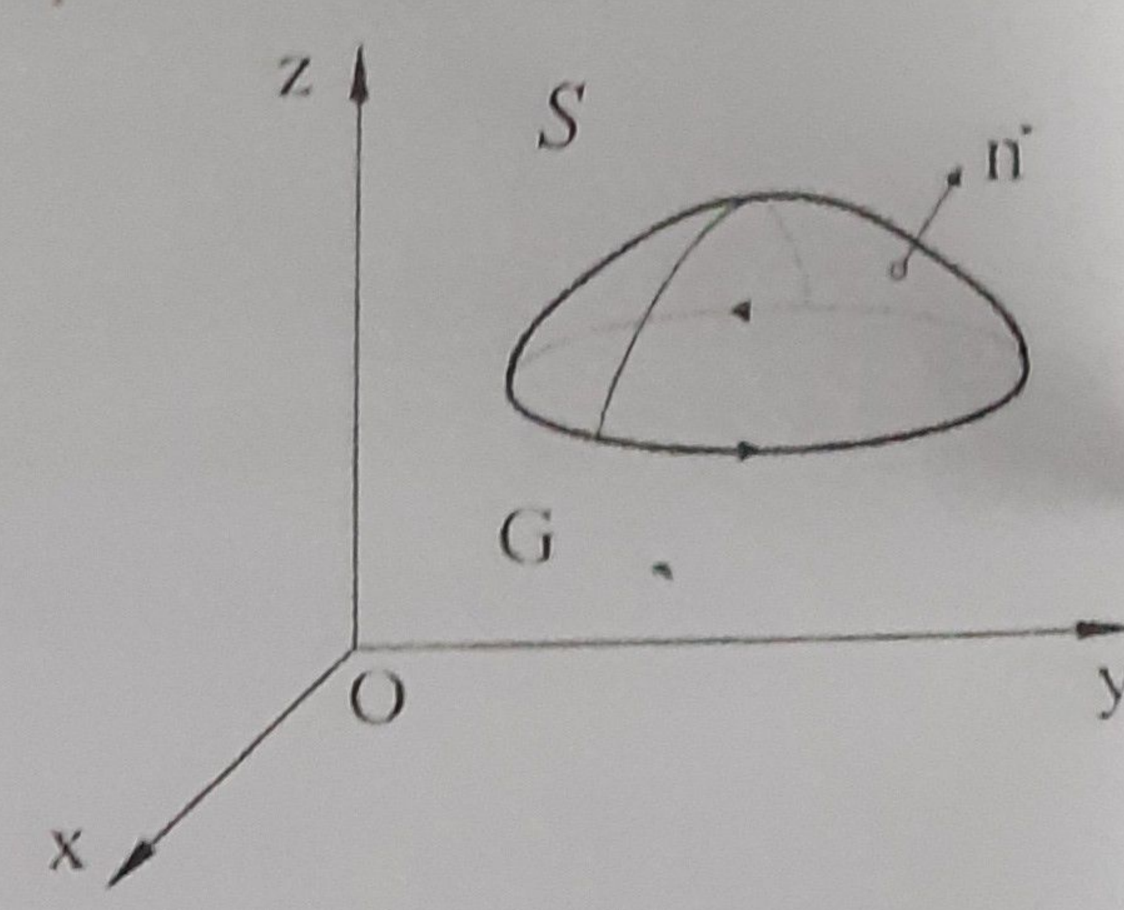
Primjer 16. Naći tok T vektorskog polja $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} - z^3\vec{k}$ kroz svu površinu kocke S: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$, u pravcu spoljne normale.

$$T = \oiint_S x^3 dydz + y^3 dxdz - z^3 dxdy = 3\iiint_V (x^2 + y^2 - z^2)dxdydz =$$

$$3\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 + y^2 - z^2)dz = a^5 .$$

Grinova formula daje vezu između dvostrukog integrala po oblasti S i krivolinijskog integrala po granici G oblasti S. Stoksova formula se javlja uopštenjem Grinove formule. Ona predstavlja vezu između površinskog integrala po površi S i krivolinijskog integrala po granici G površi S (Sl 2).

Neka je površ S zadata jednačinom $z = z(x, y)$, gdje su funkcije $z(x, y)$, $z_x'(x, y)$ i $z_y'(x, y)$ neprekidne u zatvorenoj oblasti σ koja je projekcija površi S na ravan Oxy. Označimo sa G granicu oblasti S.



Sl 2

Ako su funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima prvog reda na površi S, tada važi

$$\oint_G P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS \quad (3)$$

Formula (3) naziva se Stoksova formula.

Izraz u zagradama na desnoj strani znaka jednakosti u (3) može se simbolički zapisati u obliku determinante trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Saglasno prethodnoj oznaci Stoksova formula se može zapisati i na sljedeći način:

$$\oint_G P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS .$$

Stoksovu formulu mnogi matematičari smatraju krunom matematičke analize.

Primjer 17. Naći $\oint_G x^2 y^3 dx + dy + z dz$, gdje je G kružna linija: $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

Označimo sa S krug $x^2+y^2\le r^2$. Primjenom Stoksove formule dobijamo da je

$$\oint_G x^2y^3dx+dy+zdz=-3\iint_S x^2y^2\cos\gamma dS=-3\iint_S x^2y^2dxdy=-3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^r\rho^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\rho=$$

$$-\frac{\pi r^6}{8}.$$

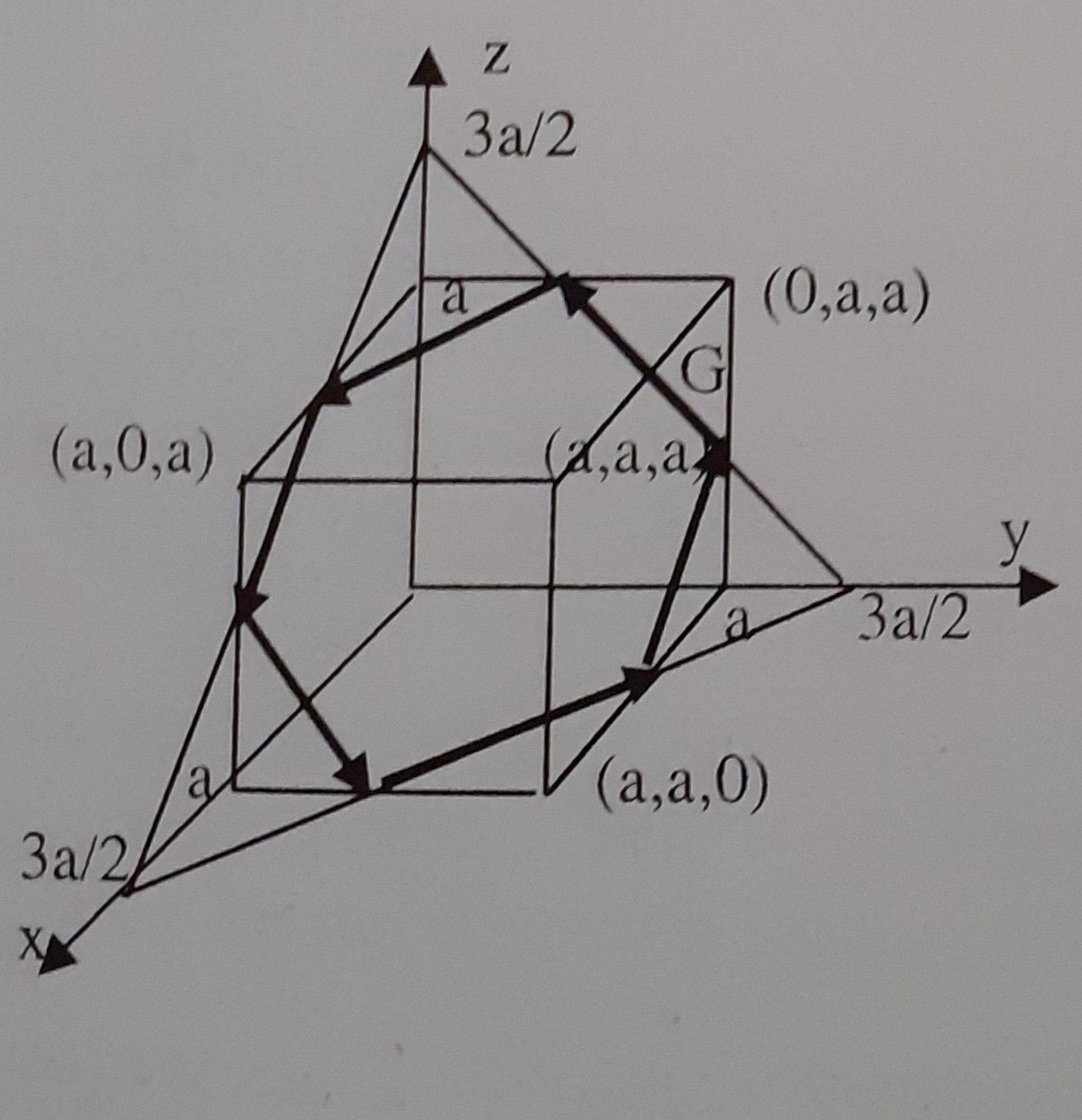
Primjer 18. Naći $\oint_G (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$, gdje je G kružna linija: $x^2+y^2+z^2=r^2$, $x+y+z=0$.

Označimo sa S krug koji nastaje u presjeku sfere $x^2+y^2+z^2=r^2$ i ravni $x+y+z=0$. Primjenom Stoksove formule dobijamo da je

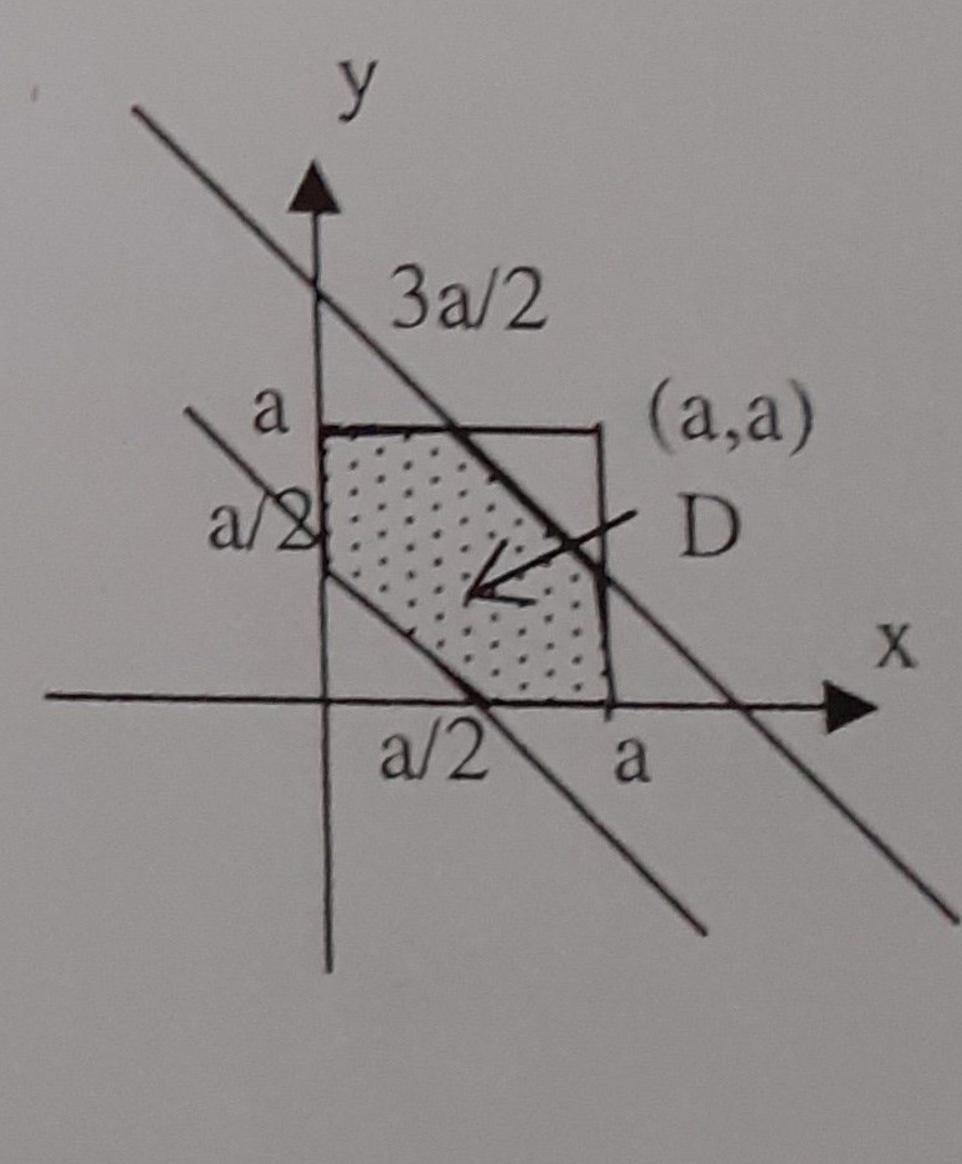
$$\oint_G (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz=\iint_S(0\cdot dS)=0.$$

Primjer 19. Naći $\oint_G (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, gdje je L presjek kocke $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$ i ravni $x+y+z=\frac{3}{2}a$ u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu ako se posmatra sa pozitivnog dijela ose Ox (Sl 3).

R. Neka je $P=y^2-z^2$, $Q=z^2-x^2$ i $R=x^2-y^2$. Tada saglasno Stoksovoj formuli imamo da je



Sl 3



Sl 4

Glava 2. REDOVI

2.1. Brojni redovi

a) Konvergencija brojnog reda

Neka je $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ niz realnih brojeva.

Definicija 1. Izraz

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

ili kraće zapisano

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad (1)$$

nazivamo beskonačni brojni red (kratko red). Brojeve $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nazivamo članovima reda, pri čemu a_n nazivamo opštim članom.

Dfinicija 2. Niz $\langle S_n \rangle$, čiji su članovi $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \dots$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, ... nazivamo nizom parcijalnih suma reda (1).

Uočimo, da ako je poznat niz parcijalnih suma $\langle S_n \rangle$, tada su poznati i članovi reda čije su to parcijalne sume:

$$a_1 = S_1,\ a_2 = S_2 - S_1, \dots,\ a_n = S_n - S_{n-1}, \dots.$$

Definicija 3. Za red (1) kažemo da konvergira, ako njegov niz parcijalnih suma ima konačnu graničnu vrijednost. Sumom konvegentnog reda (1) nazivamo $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Ako red (1) konvergira ka broju S, tada umjesto $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ pišemo $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Za red koji ne konvergira kažemo da divergira.

Primjer 1. Ispitati konvergenciju reda

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \dots..$$

Kako je $\dfrac{1}{i\cdot(i+1)}=\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i+1}$, to je $S_n=1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2-\dfrac{1}{n+1}$. Dalje je $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n+1}\right)=2$. Slijedi, dati red konvergira ka broju 2, pa možemo pisati da je $2=1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots.$

Primjer 2. Ispitati konvergenciju (harmonijskog) reda

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.\ .$$

Dati red zapišimo u obliku

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots \qquad (2)$$

Razmotrimo red

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\ldots+\frac{1}{16}}_{8\ sabiraka}\right)+\ldots \qquad (3)$$

Neka su S_n^1 i S_n^2, redom, n-te parcijalne sume redova (2) i (3). Očigledno je $S_n^1>S_n^2$ za svako $n\geq 3$. Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n^2=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{n-1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2}=+\infty$, to je i $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n^1=+\infty$, tj. dati red divergira.

Primjer 3. Ispitati konvergenciju geometrijskog reda

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots.$$

Kako je za $q=1$: $S_n=\underbrace{1+1+1\ldots+1}_{n\ sabiraka}=n$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$, to dati red divergira za $q=1$. I za $q=-1$ dati red divergira. Neka je $|q|\neq 1$. Predstavimo S_n u obliku $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}q^{i-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}-\dfrac{q^n}{1-q}$. Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ za $|q|<1$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{1}{1-q}$ za $|q|<1$. Za $|q|>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n$ ili ne postoji ili ima beskonačnu vrijednost, pa će dati red divergirati. Iz prethodnog slijedi, dati geometrijski red konvergira za $|q|<1$ ka broju $\dfrac{1}{1-q}$, tj.

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots,\ |q|<1.$$

U praksi se često sume konvergentnih redova zamjenjuju njihovim parcijalnim sumama. Zato je važno znati da li dati red konvergira.

Najopštiji kriterijum konvergencije (brojnih) redova pripada Košiju i oslanja se na Košijev kriterijum konvergencije (brojnih) nizova.

Teorema 1 (Koši).

(Red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira)$\Leftrightarrow$

$((\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n>n_0)(\forall p\in N): |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon)$.

Dokaz. Neka je (S_n) niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. a) $(\Rightarrow)$: Kako niz (S_n) konvergira, to po Košijevom kriterijumu konvergencije nizova imamo:

$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n>n_0)(\forall p\in N): |S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

b)$(\Leftarrow)$: Kako je $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n>n_0)(\forall p\in N): |a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$, to saglasno Košijevom kriterijumu konvergencije nizova imamo da niz (S_n) konvergira, tj. red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Primjer 4. Ispitati konvergenciju reda $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$.

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljno malo. Kako je

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|<$$

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)(n+p-1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

za svako $n>n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, to $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n>n_0)(\forall p\in N): |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.

Slijedi, dati red konvergira.

Teorema 2 (neophodan uslov konvergencije redova).

$$(\text{Red } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konvergira})\Rightarrow(\lim_{n\to+\infty} a_n=0). \qquad (4)$$

Dokaz teoreme je vrlo prost. Neka je $\langle S_n \rangle$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Kako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, to postoji konačna granična vrijednost $\lim_{n\to+\infty} S_n$. Neka je $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$. Kako je $a_n = S_n - S_{n-1}$, to je $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$, što je i trebalo dokazati.

Posljedica 1. Koristeći kontrapoziciju implikacije (4) imamo

$$(\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0) \Rightarrow (\text{red } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ divergira}).$$

Primjer 5. Red $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{n}$ divergira, jer je $\lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$.

Navedimo neka svojstva konvergentnih redova:

Svojstvo 1. Odbacivanje proizvoljnog konačnog broja članova reda nema uticaja na njegovu konvergenciju.

Dokaz. Razmotrimo redove $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ i $a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+n} + \ldots$ i označimo sa S_n i σ_n, redom, njihove odgovarajuće parcijalne sume. Kako je $S_{N+k+p} - S_{N+k} = \sigma_{k+p} - \sigma_k$, to saglasno Košijevom kriterijumu konvergencije nizovi (S_m) i (σ_k) istovremeno konvergiraju, ili divergiraju. Slijedi, redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{N+k}$ istovremeno konvergiraju, ili divergiraju.

Svojstvo 2. Konvergencija reda neće biti narušena, ako mu članove pomnožimo brojem različitim od nule.

Dokaz. Neka je (S_n) niz parcijalnih suma konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Ako članove ovog reda pomnožimo brojem λ, $\lambda \neq 0$, dobijamo red $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n)$ za čiji niz parcijalnih suma $(S_n^{'})$ važi da je $S_n^{'} = \lambda S_n$. Očigledno, ako je $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, tada je $\lim_{n\to+\infty} S_n^{'} = \lambda \lim_{n\to+\infty} S_n = \lambda S$, tj. i red $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n)$ konvergira.

Svojstvo 3. Ako redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergiraju, tada i redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)$ konvergiraju, pri čemu je

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n-\sum_{n=1}^{+\infty}b_n.$$

Dokaz. Neka je $S_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}a_k$ i $S_n^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}b_k$. Kako postoje $\lim_{n\to+\infty}S_n^{(1)}$ i $\lim_{n\to+\infty}S_n^{(2)}$, to je $\lim_{n\to+\infty}\left(S_n^{(1)}\pm S_n^{(2)}\right)=\lim_{n\to+\infty}S_n^{(1)}\pm\lim_{n\to+\infty}S_n^{(2)}$, tj. $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$.

Napomena 1. Iz konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\pm b_n)$ ne slijedi konvergencija redova $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$. Tako, na primjer, red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (primjer 1) konvergira i može se zapisati u obliku $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ u kojem redovi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ i $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ divergiraju (primjer 2).

Svojstvo 4. Suma konvergentnog reda se ne mijenja ako njegove članove, ne mijenjajući im poredak, grupišemo na različite načine.
Dokaz ovog svojstva slijedi iz činjenice da se parcijalne sume, grupisanjem članova bez premještanja, javljaju podnizovima konvergentnog niza, pa su i same konvergentne.

Ako članovi konvergentnog reda izmijenjaju mjesta, tada će red i dalje ostati konvergentan, ali mu se suma može promijeniti. To pokazuje primjer reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ koji konvergira (Lajbnicov kriterijum, navešćemo ga nešto kasnije). Označimo sumu datog reda sa S, tj. $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$ (5). Pomnožimo ovu jednakost sa $\frac{1}{2}$, dobijamo da je $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}+\ldots$ (6). Uočimo da se dodavanjem nula članova ne mijenja granična vrijednost niza parcijalnih suma reda, a to znači ni njegova suma. Zato, umjesto reda (6) razmotrimo red $\frac{1}{2}S=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\ldots+0+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}+\ldots$ (7). Primijenimo svojstvo 3: saberimo redove (5) i (7). Dobijamo da je

$$\frac{3}{2}S=1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+0+\ldots+\frac{1}{4n-3}+0+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots,$$

tj.

$$\frac{3}{2}S=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots. \qquad (8)$$

U redu na desnoj strani u (8) nalaze se članovi reda (5) sa ispremještanim članovima. Ovaj primjer pokazuje da se premještanjem članova konvergentnog reda može izmijenjiti njegova suma. Navedimo klasu redova kod kojih se ova suma ne mijenja.

Definicija 4. Red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ nazivamo apsolutno konvergentnim ako konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Teorema 4. Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergira, tada on konvergira.

Dokaz. Neka je $S_n^1 = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ i $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Dalje je

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| = |S_{n+1}^1 - S_n^1|.$$

Kako po pretpostavci niz $\langle S_n^1 \rangle$ konvergira, to i niz $\langle S_n \rangle$ konvergira.

Definicija 5. Konvergenti red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ nazivamo uslovno konvergentan ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ divergira.

Teorema 5. Neka red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergira ka broju S. Tada za proizvoljno grupisanje članova on ponovo konvergira ka broju S.

Dokaz teoreme 5 nećemo navoditi.

Uvedimo pojam proizvoda redova. Proizvodom redova $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ nazivamo red $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ čiji su članovi određeni na sljedeći način: $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

U vezi sa proizvodom redova važi tvrđenje:

Teorema 6. Ako jedan od dva konvergentna reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ apsolutno konvergira, tada i njihov proizvod konvergira. Suma proizvoda ovih redova jednaka je proizvodu suma polaznih redova.

Dokaz teoreme 6 nećemo navoditi.

Za uslovno konvergentne redove teoreme 4 i 5 ne moraju da važe. Za njih važi

Teorema 7 (Riman). Neka red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uslovno konvergira i $\alpha, \beta \in R$. Tada se članovi reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ mogu grupisati u red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{'}$ tako da za niz parcijalnih suma $\langle S_n^{'} \rangle$, $S_n^{'} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{'}$ važi: $\alpha = \liminf\limits_{n\to+\infty} S_n^{'}$, $\beta = \limsup\limits_{n\to+\infty} S_n^{'}$.

Dokaz teoreme 6 nećemo navoditi.

b) Kriterijumi konvergencije brojnih redova

Navodimo nekoliko, osnovnih, kriterijuma o konvergenciji brojnih redova. Neka su data dva brojna reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Prvi red označimo kratko (A), a drugi (B).

1. Kriterijum upoređivanja

a) Ako je za svako $n \ge n_0$: $|a_n| \le b_n$, tada iz konvergencije reda (B) slijedi apsolutna konvergencija reda (A),

b) Ako je za svako $n \ge n_0 : 0 < b_n \le a_n$, tada iz divergencije reda (B) slijedi divergencija reda (A).

Dokaz. a) Kako je red (B) konvergentan, to na osnovu teoreme 1 imamo:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(\forall p \in N): |b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dalje je $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}$, odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(\forall p \in N): \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|\big| < \varepsilon,$$

tj. red $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ apsolutno konvergira. (Napomena: Kako apsolutno konvergentan red konvergira (teorema 4), to iz tvrđenja a) slijedi da red (A) konvergira.)

b) U ovom slučaju je $S_n^{(2)} > S_n^{(1)}$, gdje je $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k$ i $S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(2)} = +\infty$, to je i $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(1)} = +\infty$, tj. red ($A$) divergira.

Primjer 6. Ispitati konvergenciju redova: a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

a) Neka je $a_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}$ i $b_n = \frac{1}{n^2}$. Tada je $\forall n \in N: \frac{\sin^2 n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$. Kako red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, to i red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ konvergira.